

Разбор заданий дистанционного тура Краевой олимпиады по математике
«Пять с плюсом»

6 класс

2024/25 учебный год

Каждая задача оценивалась в 1 балл.

Задача №1.1

В магическом лесу растут восемь древних кристаллов, выстроенных в линию. Первый кристалл светится с силой 5 единиц, а последний — 8 единиц. Чтобы защитить лес от темных сил, необходимо активировать остальные кристаллы так, чтобы сумма энергии любых трех соседних кристаллов равнялась 20 единицам. С какой силой должен светиться каждый из скрытых (неактивированных) кристаллов.

Ряд кристаллов: 5, ?, ?, ?, ?, ?, ?, 8.

Запишите каждое значение в отдельную ячейку, соблюдая правило: каждые три подряд идущих кристалла в сумме дают 20.

Ответ: 8,7,5,8,7,5

Решение: Сумма энергии первого, второго и третьего кристаллов должна быть равна 20, и сумма энергии второго, третьего и четвертого кристаллов также должна быть равна 20. Следовательно, сила четвертого кристалла должна быть равна силе первого, то есть равна пяти. Аналогично сила седьмого кристалла также равна 5. Тогда сила шестого кристалла равна $20 - 8 - 5 = 7$, пятого: $20 - 5 - 7 = 8$, третьего — 7, второго — 8.

Задача №1.2

В магическом лесу растут восемь древних кристаллов, выстроенных в линию. Первый кристалл светится с силой 5 единиц, а последний — 8 единиц. Чтобы защитить лес от темных сил, необходимо активировать остальные кристаллы так, чтобы сумма энергии любых трех соседних кристаллов равнялась 22 единицам. С какой силой должен светиться каждый из скрытых (неактивированных) кристаллов.

Ряд кристаллов: 5, ?, ?, ?, ?, ?, ?, 8.

Запишите каждое значение в отдельную ячейку, соблюдая правило: каждые три подряд идущих кристалла в сумме дают 22.

Ответ: 8,9,5,8,9,5

Задача №1.3

В магическом лесу растут восемь древних кристаллов, выстроенных в линию. Первый кристалл светится с силой 7 единиц, а последний — 9 единиц. Чтобы защитить лес от темных сил, необходимо активировать остальные кристаллы так, чтобы сумма энергии любых трех соседних кристаллов равнялась 20 единицам. С какой силой должен светиться каждый из скрытых (неактивированных) кристаллов.

Ряд кристаллов: 7, ?, ?, ?, ?, ?, ?, 9.

Запишите каждое значение в отдельную ячейку, соблюдая правило: каждые три подряд идущих кристалла в сумме дают 20.

Ответ: 9,4,7,9,4,7

Задача №1.4

В магическом лесу растут восемь древних кристаллов, выстроенных в линию. Первый кристалл светится с силой 5 единиц, а последний — 8 единиц. Чтобы защитить лес от темных сил, необходимо активировать остальные кристаллы так, чтобы сумма энергии любых трех соседних кристаллов равнялась 18 единицам. С какой силой должен светиться каждый из скрытых (неактивированных) кристаллов.

Ряд кристаллов: 5, ?, ?, ?, ?, ?, ?, 8.

Запишите каждое значение в отдельную ячейку, соблюдая правило: каждые три подряд идущих кристалла в сумме дают 18.

Ответ: 8,5,5,8,5,5

Задача №2.1

В таинственной лаборатории изобрели "числовую амебу", которая пожирает числа по особому алгоритму. Исходно в пробирке находится число 61. Каждую минуту амеба поглощает число, перерабатывает его и выделяет новое: произведение цифр съеденного числа + 13. Например, через минуту после старта в пробирке окажется 19 ($6 \times 1 + 13$). Какое число будет в пробирке через час?

Ответ 16

Решение: Рассмотрим числа, которые будут записаны на доске, через несколько первых минут:

1) $6 \cdot 1 + 13 = 19$

2) $1 \cdot 9 + 13 = 22$

3) $2 \cdot 2 + 13 = 17$

4) $1 \cdot 7 + 13 = 20$

5) $2 \cdot 0 + 13 = 13$

6) $1 \cdot 3 + 13 = 16$

7) $1 \cdot 6 + 13 = 19$

После шестой минуты числа начинают повторяться. За 60 минут пройдет ровно 10 циклов по шесть минут. Значит, через час в пробирке будет число 16.

Задача №2.2

В таинственной лаборатории изобрели "числовую амебу", которая пожирает числа по особому алгоритму. Исходно в пробирке находится число 91. Каждую минуту амеба поглощает число, перерабатывает его и выделяет новое: произведение цифр съеденного числа + 13. Например, через минуту после старта в пробирке окажется 22 ($9 \times 1 + 13$). Какое число будет в пробирке через час?

Ответ 19

Задача №2.3

В таинственной лаборатории изобрели "числовую амебу", которая пожирает числа по особому алгоритму. Исходно в пробирке находится число 71. Каждую минуту амеба поглощает число, перерабатывает его и выделяет новое:

произведение цифр съеденного числа + 13. Например, через минуту после старта в пробирке окажется 20 ($7 \times 1 + 13$). Какое число будет в пробирке через час?

Ответ 17

Задача №2.4

В таинственной лаборатории изобрели "числовую амебу", которая пожирает числа по особому алгоритму. Исходно в пробирке находится число 31. Каждую минуту амеба поглощает число, перерабатывает его и выделяет новое: произведение цифр съеденного числа + 13. Например, через минуту после старта в пробирке окажется 16 ($3 \times 1 + 13$). Какое число будет в пробирке через час?

Ответ 13

Задача №3.1

В уютном соковом баре «Фреш&Фьюжн» готовятся к большому фестивалю. Шеф-бариста Майя использует 1 ведро фруктов за 1 час, чтобы приготовить свежавыжатый сок, но 25% уходит в жмых. Организаторы фестиваля заказали ровно полведра сока для дегустации. Сколько минут ей потребуется, чтобы выполнить заказ?

Ответ: 40

Решение: так как четверть фруктов ушла в жмых, Майя получила за 1 час три четверти ведра сока. Значит, четверть ведра сока Майя получила за 20 минут, а половину ведра – за 40 минут.

Задача №3.2.

В уютном соковом баре «Фреш&Фьюжн» готовятся к большому фестивалю. Шеф-бариста Майя использует 1 ведро фруктов за 1 час, чтобы приготовить свежавыжатый сок, но 25% уходит в жмых. Организаторы фестиваля заказали ровно полтора ведра сока для дегустации. Сколько минут ей потребуется, чтобы выполнить заказ?

Ответ: 120

Задача №3.3

В уютном соковом баре «Фреш&Фьюжн» готовятся к большому фестивалю. Шеф-бариста Майя использует 1 ведро фруктов за 1 час, чтобы приготовить свежавыжатый сок, но 25% уходит в жмых. Организаторы фестиваля заказали ровно одно ведро сока для дегустации. Сколько минут ей потребуется, чтобы выполнить заказ? В ответе укажите только число.

Ответ: 80

Задача №4.1

В социальной сети «Кругозор» зарегистрировались 22 пользователя: авторы контента и их подписчики. Каждый автор привлек подписчиков по правилу:

- Первый автор — 7 подписчиков,
- Второй — 8 подписчиков,
- Третий — 9 подписчиков,
- ...
- Последний автор — всех подписчиков.

Вопрос: Сколько авторов контента в сети?

Ответ: 8

Решение: заметим, что количество подписчиков, которых привлек автор, на 6 больше, чем его номер. Пусть было всего x авторов, тогда последний имеет номер x и привлек всех подписчиков и их всего $x + 6$. Получается, что всего в соцсети было $x + (x + 6) = 2x + 6 = 22$ человека, а значит, авторов было 8.

Задача №4.2

В социальной сети «Кругозор» зарегистрировались 24 пользователя: авторы контента и их подписчики. Каждый автор привлек подписчиков по правилу:

- Первый автор — 7 подписчиков,
- Второй — 8 подписчиков,
- Третий — 9 подписчиков,

- ...
- Последний автор — всех подписчиков.

Вопрос: Сколько авторов контента в сети?

Ответ: 9

Задача №4.3

В социальной сети «Кругозор» зарегистрировались 26 пользователя: авторы контента и их подписчики. Каждый автор привлек подписчиков по правилу:

- Первый автор — 7 подписчиков,
- Второй — 8 подписчиков,
- Третий — 9 подписчиков,
- ...
- Последний автор — всех подписчиков.

Вопрос: Сколько авторов контента в сети?

Ответ: 10

Задача №4.4

В социальной сети «Кругозор» зарегистрировались 28 пользователя: авторы контента и их подписчики. Каждый автор привлек подписчиков по правилу:

- Первый автор — 7 подписчиков,
- Второй — 8 подписчиков,
- Третий — 9 подписчиков,
- ...
- Последний автор — всех подписчиков.

Вопрос: Сколько авторов контента в сети?

Ответ: 11

Задача №5.1

Юный изобретатель Макс разработал робота, который умеет выполнять две команды:

- Прибавить 5 к текущему значению,
- Умножить на 5 текущее значение.

Макс запустил робота с начальным числом 5 и дал ему задание: выполнить каждую команду не более двух раз (можно и ни разу). Сколько уникальных результатов может выдать робот?

Ответ: 19

Решение: обозначим первую команду +, вторую команду – *. Составим таблицу возможных результатов:

| Количество выполняемых команд | Последовательность команд | Результат |
|-------------------------------|---------------------------|-----------|
| 0 | | 5 |
| 1 | + | 10 |
| | * | 25 |
| | ++ | 15 |
| | +* | 50 |
| | *+ | 30 |
| | ** | 125 |
| 3 | ++* | 75 |
| | +*+ | 55 |
| | +** | 250 |
| | *++ | 35 |
| | *+* | 150 |
| | **+ | 130 |
| 4 | ++** | 375 |
| | +**+ | 275 |
| | +*** | 255 |
| | *+++ | 175 |
| | *+*+ | 155 |
| | **++ | 135 |

Таким образом, получается всего 19 результатов.

Юный изобретатель Макс разработал робота, который умеет выполнять две команды:

- Прибавить 7 к текущему значению,
- Умножить на 7 текущее значение.

Макс запустил робота с начальным числом 7 и дал ему задание: выполнить каждую команду не более двух раз (можно и ни разу). Сколько уникальных результатов может выдать робот?

Ответ 19

Задача №6.1

В цифровой вселенной «Квантополис» создают уникальные коды для защиты данных. Код считается «стабильным», если:

- Состоит только из символов 3 и 4,
- Является четырёхзначным,
- Делится и на 3, и на 4 одновременно.

Сколько таких «стабильных» кодов может создать система безопасности «Квантополиса»?

Ответ: 2

Решение: чтобы число делилось на 4, две его последние цифры должны образовывать двузначное число, делящееся на 4. Это может быть только 44. Чтобы число делилось на 3, сумма цифр этого числа должна делиться на 3. Тогда оставшимися двумя цифрами могут быть только 3 и 4. Таким образом, получаем два числа: 3444 и 4344.

Задача №6.2

В цифровой вселенной «Квантополис» создают уникальные коды для защиты данных. Код считается «стабильным», если:

- Состоит только из символов 3 и 5,
- Является четырёхзначным,
- Делится и на 3, и на 5 одновременно.

Сколько таких «стабильных» кодов может создать система безопасности «Квантополиса»?

Ответ: 3

Задача №7.1

В галактической библиотеке «Архив Бесконечности» хранится число, записанное как 1 с 25 нулями (1000...0). Юный астроинженер Зория случайно активировала протокол, который вычел из этого числа 25. Чему равна сумма цифр получившегося результата?

Ответ: 219

Решение: $1 \underbrace{00 \dots 0}_{25} - 25 = \underbrace{99 \dots 975}_{25 \text{ символов}}$. Сумма цифр такого числа равна $9 \cdot 23 + 7 + 5 = 219$

Задача №7.2

В галактической библиотеке «Архив Бесконечности» хранится число, записанное как 1 с 30 нулями (1000...0). Юный астроинженер Зория случайно активировала протокол, который вычел из этого числа 30. Чему равна сумма цифр получившегося результата?

Ответ: 259

Задача №7.3

В галактической библиотеке «Архив Бесконечности» хранится число, записанное как 1 с 27 нулями (1000...0). Юный астроинженер Зория случайно активировала протокол, который вычел из этого числа 27. Чему равна сумма цифр получившегося результата?

Ответ: 235

Задача №7.4

В галактической библиотеке «Архив Бесконечности» хранится число, записанное как 1 с 29 нулями ($1000\dots0$). Юный астроинженер Зория случайно активировала протокол, который вычел из этого числа 29. Чему равна сумма цифр получившегося результата?

Ответ: 251

Задача №8.1.

В волшебном цветочном магазине готовят 10 элитных композиций из редких роз. Каждая следующая композиция содержит больше роз, чем предыдущая. Всего использовали 150 роз, а в первой композиции оказалось не менее половины от количества роз в десятой. Сколько роз в шестой композиции?

Ответ: 16

Решение: пусть в первой композиции x роз, тогда во второй — не меньше чем $x + 1$ роза, в третьей — не меньше чем $x + 2$ розы и так далее. Таким образом, в десятой композиции не меньше чем $x + 9$ роз. Следовательно, общее количество роз не меньше $10x + 45$. Учитывая, что всего использовали 150 роз, получим $x \leq 10$. С другой стороны, в десятой композиции должно быть не больше $2x$ роз, в девятой — не больше $2x - 1$ роз и так далее. Это означает, что в первой композиции не больше $2x - 9$ роз, а всего роз — не больше чем $20x - 45$. Так как всего использовали 150 роз, $x \geq 10$. Таким образом, в первой композиции ровно 10 роз, а в последней — 19 или 20. Найдем сумму одиннадцати последовательных чисел, начиная с десяти: $10 + 11 + \dots + 19 + 20 = 165$. Так как всего должно быть 150 роз, отсутствует композиция, в которой 15 роз. Следовательно, композиции определяются однозначно: 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19 и 20 роз с первой по десятую соответственно. Значит, в шестой композиции 16 роз.

Задача №8.2

В волшебном цветочном магазине «Букет Фей» готовят 10 элитных композиций из редких роз. Каждая следующая композиция содержит больше роз, чем предыдущая. Всего использовали 150 роз, а в первой композиции оказалось не менее половины от количества роз в десятой. Сколько роз в седьмой композиции?

Ответ: 17

Задача №8.3

В волшебном цветочном магазине «Букет Фей» готовят 10 элитных композиций из редких роз. Каждая следующая композиция содержит больше роз, чем предыдущая. Всего использовали 150 роз, а в первой композиции оказалось не менее половины от количества роз в десятой. Сколько роз в восьмой композиции?

Ответ: 18

Задача №8.4

В волшебном цветочном магазине «Букет Фей» готовят 10 элитных композиций из редких роз. Каждая следующая композиция содержит больше роз, чем предыдущая. Всего использовали 150 роз, а в первой композиции оказалось не менее половины от количества роз в десятой. Сколько роз в пятой композиции?

Ответ: 14